№1
$n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ⋮ 120

$n(n-1)(n+1)$ – 3 послед. числа, их произведение всегда ⋮ 6 $\Rightarrow$ n^2+1 должно быть ⋮ 20

$n^2 \equiv 19 \pmod{20}$, – невозможно, т.к. $n^2 \equiv 9 \pmod{20}$, если n оканчивается на 3 или 7

$\Downarrow$
$(n-1)(n+1)$ должно быть кратно 12 $\Rightarrow$ n – нечет., т.к. тогда n-1 и n+1 – чет

Ответ: n – нечетное.

±

№2
Нет, т.к. можно привести контр-пример:
Число 1998 делится на 27 нацело (74) и сумма его цифр = 27.
А сумма цифр числа 1989 = 27, но оно на 27 не делится, т.к. больше на 9 меньше.

Ответ: Нет

+

№3
Предположим, что все студенты составили < 5 задач.
Тогда, т.к. по условию как минимум по 1 человеку составили 1, 2 и 3 задачи, максимум задач $= 1+2+3+4\cdot7 = 1+2+3+28 = 34$, что меньше нужного в условии. Следовательно, хотя бы один студент составил 5 задач. $(1+2+3+4\cdot6+5=35)$

−

+

Принцип Дирихле!

№4
$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

Воспользуемся методом математической индукции.
Проверим для $n=2$:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$

Пусть неравенство верно для $n=k$:
Предположим, что неравенство верно для $n=k$:

$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2}$

Проверим для $k+1$:

$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{2}$

Докажем, что $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > 0$ $\quad \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{2}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$

т.к. все остальные слагаемые совпадают.

$2k+1 < 2k+2$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2k+2}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$

Неравенство верно для $k+1$, следовательно неравенство верно для любого n, согласно методу математической индукции.

+

№6

Количество изготовленных кубиков = 6!

Количество повторений одного кубика = 3 оси · 4 повтора на одной оси

Количество разных кубиков = $\frac{6!}{12} = 60$

−/+

Ответ: 60

№7

Для достижения наибольшей суммы нужно, чтобы выполнялись 3 условия:

$$\begin{cases} a+b=100 \\ (40-a)\cdot 5 = 200-b \; * \\ 60a = 20b \; ** \end{cases}$$

a – масса алмазов

b – масса золота

* т.к. 1кг алмазов занимает в 5 раз больший объём, чем 1кг зо

** т.к. сумма за алмазы и золото должна быть равна.

$$\begin{cases} a+b=100 \\ (40-a)\cdot 5 = 200-b \\ 3a = b \end{cases} \quad \begin{cases} 4a=100 \\ (40-a)\cdot 5 = 200-3a \\ 3a = b \end{cases} \quad \begin{matrix} a=25 \\ b=75 \end{matrix}$$

+

$25\cdot 60 + 75\cdot 20 = 3000$ динаров

Ответ: 3000 динаров

№8

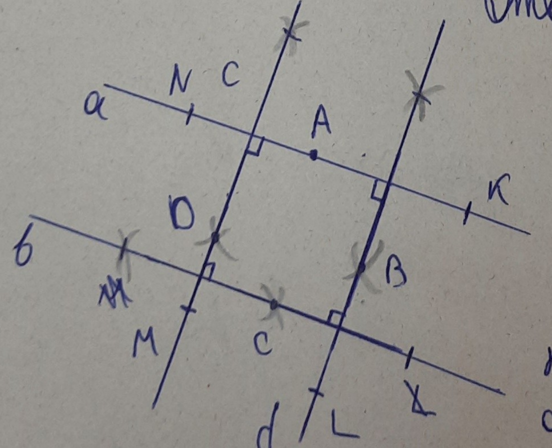
Стрелок сделал 12 выстрелов, т.к. >11 и минимальная сумма при 13 выстрелах $= 8\cdot 13 = 104 > 100$

Минимальная сумма при 12 выстрелах $= 8\cdot 12 = 96$, что на 4 ше нужной. Для достижения этой суммы нужно к 2 выст прибавить 1 и к одному 2, т.к. спортсмен по разу выбил все чения. Получается: $9\cdot 8 + 2\cdot 9 + 1\cdot 10 = 100$

+

Ответ: 12 выстрелов. 9 по 8 очков.
2 по 9 очков.
1 по 10 очков.

№9



Проведем прямую через · A, не пере кающую другие точки.

Возьмём радиус AB и проведем окру ность.

Возьмём радиус < AB (не намного м отложим 2 радиуса на прямой a.

Получим · K. Из точки K проведе окружность радиусом AB. Я проведе прямую d через точки пересечения. Она перпендикулярна a и проходит чер

Аналогично с · B, C, D.

В итоге мы получаем квадрат.